Systèmes dynamiques

$$\dot{\vec{x}} = \overrightarrow{F}\ (\vec{x})$$

Systèmes dissipatifs vs. conservatifs:

“Conservation du volume V dans l’espace de phase”

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \int_M \mathrm{div}\ \overrightarrow{F}\ \mathrm{d}\vec{x}}$$

*conservatif => divF=0
*dissipatif => divF<0

Systèmes dynamiques

$$\dot{\vec{x}} = \overrightarrow{F}\ (\vec{x})$$

Systèmes dissipatifs vs. conservatifs:

*conservatif => divF=0
*dissipatif   => divF<0

Ex.: système Hamiltonien : divF=0 par structure symplectique
~Thm de Liouville

Ex.: modèle de Lorenz :   divF<0

Ex.: frottements : divF<0

Systèmes dynamiques

$$\dot{\vec{x}} = \overrightarrow{F}\ (\vec{x})$$

Analyse de structures particulières dans l'espace de phase

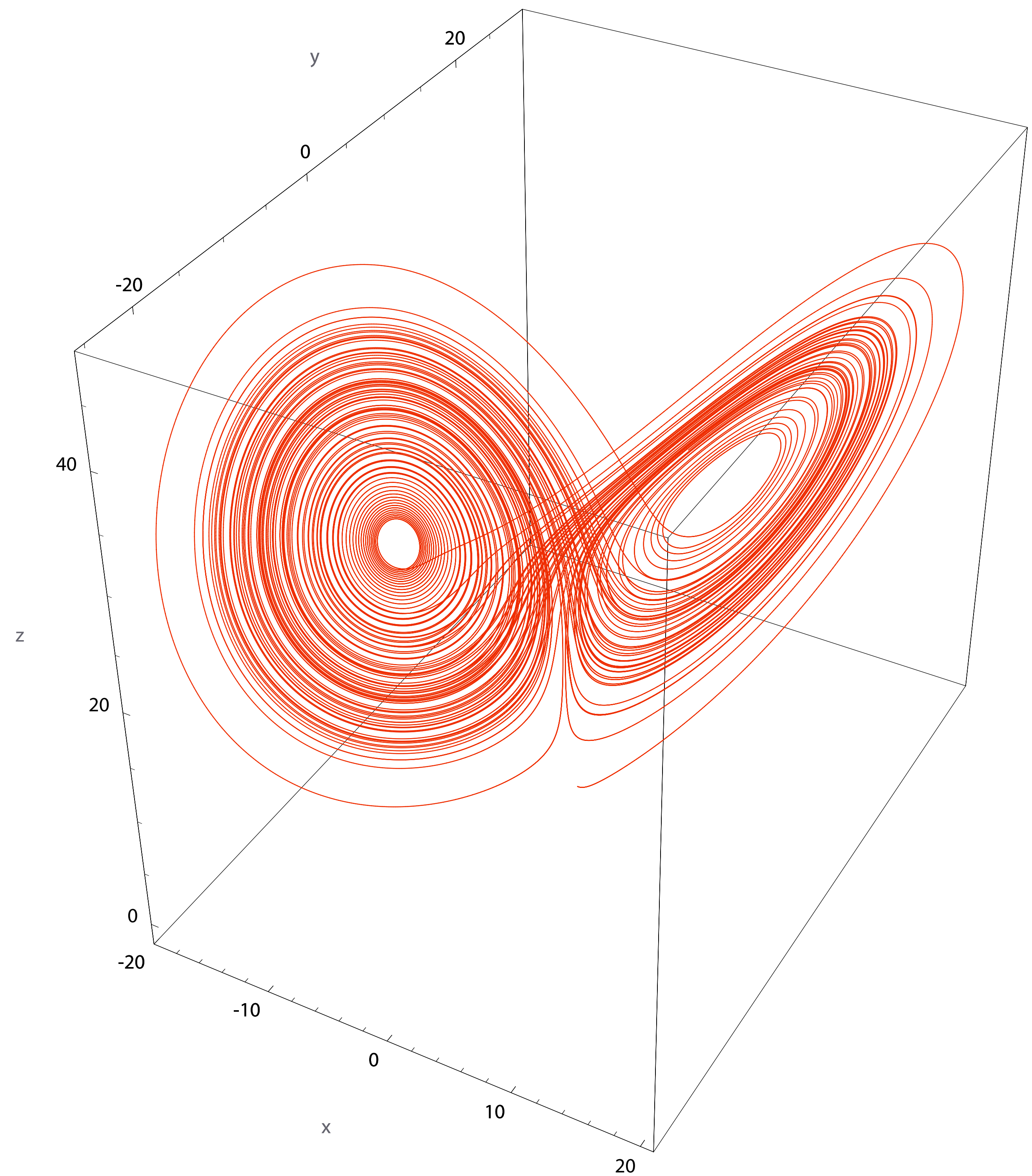
-systèmes conservatifs : points fixes et leur stabilité

-systèmes dissipatifs : attracteurs

-perte d'intégrabilité - route vers le chaos vs. portrait de phase

Le modèle de Lorenz - attracteurs étranges

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma\,[y(t) - x(t)] \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \rho\,x(t) - y(t) - x(t)\,z(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x(t)\,y(t) - \beta\,z(t) \end{cases}$$



Route vers le chaos : le modèle de Hénon-Heiles

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \lambda \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right)$$

$$\dot{x} = p_x ,$$
$$\dot{p_x} = -x - 2\lambda xy,$$
$$\dot{y} = p_y ,$$
$$\dot{p_y} = -y - \lambda(x^2 - y^2)$$

Route vers le chaos : le modèle de Hénon-Heiles

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \lambda\left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= p_x\,, \\
\dot{p_x} &= -x - 2\lambda x y, \\
\dot{y} &= p_y\,, \\
\dot{p_y} &= -y - \lambda(x^2 - y^2)
\end{aligned}$$

Pour E suffisamment petit, H est une faible
Perturbation de l'oscillateur harmonique en 2D
-> dynamique régulière

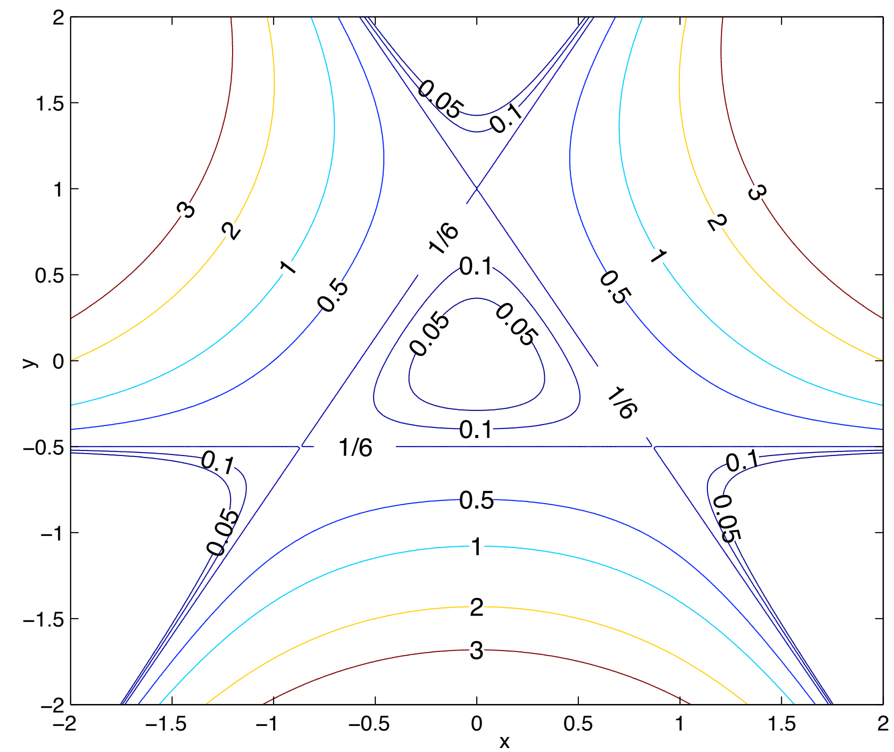
Mais pour E grand, la nonlinéarité du système
devient importante.

Route vers le chaos : le modèle de Hénon-Heiles

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \lambda\left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= p_x\,, \\
\dot{p_x} &= -x - 2\lambda x y, \\
\dot{y} &= p_y\,, \\
\dot{p_y} &= -y - \lambda(x^2 - y^2)
\end{aligned}$$

Potentiel



Pour E suffisamment petit, H est une faible Perturbation de l'oscillateur harmonique en 2D -> dynamique régulière

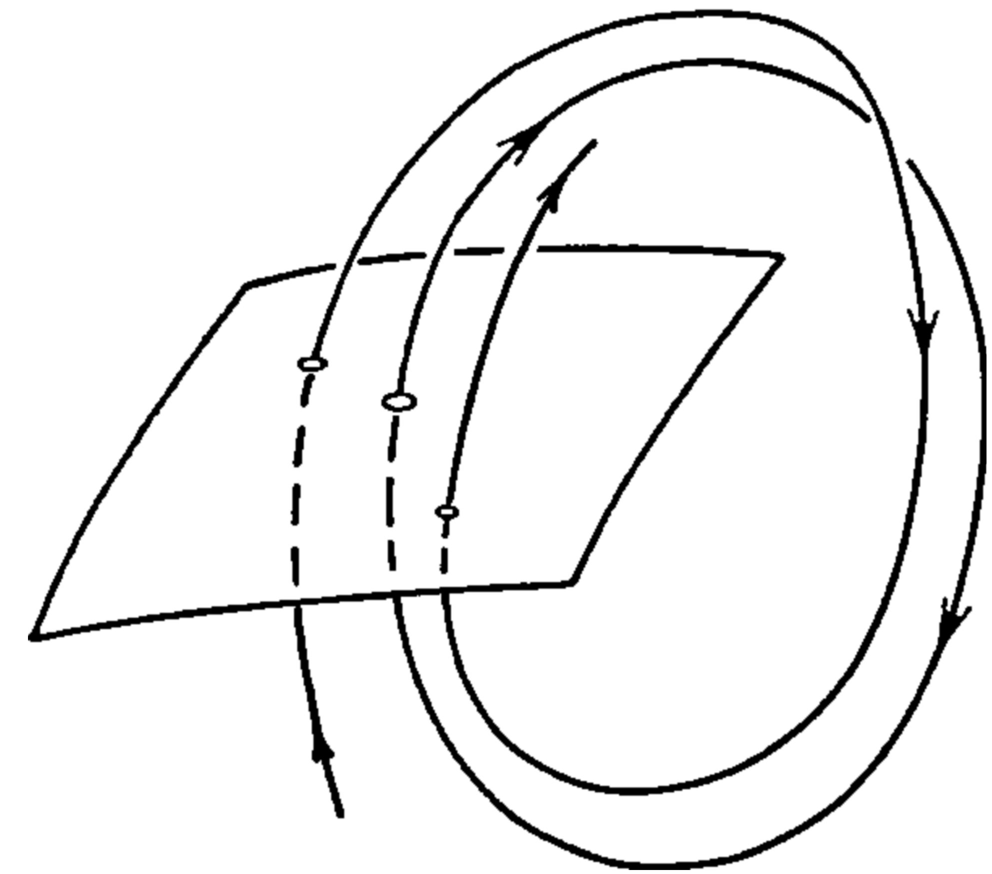
Mais pour E grand, la nonlinéarité du système devient importante.

Route vers le chaos : le modèle de Hénon-Heiles

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \lambda \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right)$$

$$\dot{x} = p_x \,,$$
$$\dot{p_x} = -x - 2\lambda xy,$$
$$\dot{y} = p_y \,,$$
$$\dot{p_y} = -y - \lambda(x^2 - y^2)$$

Visualisation:
Section de Poincaré

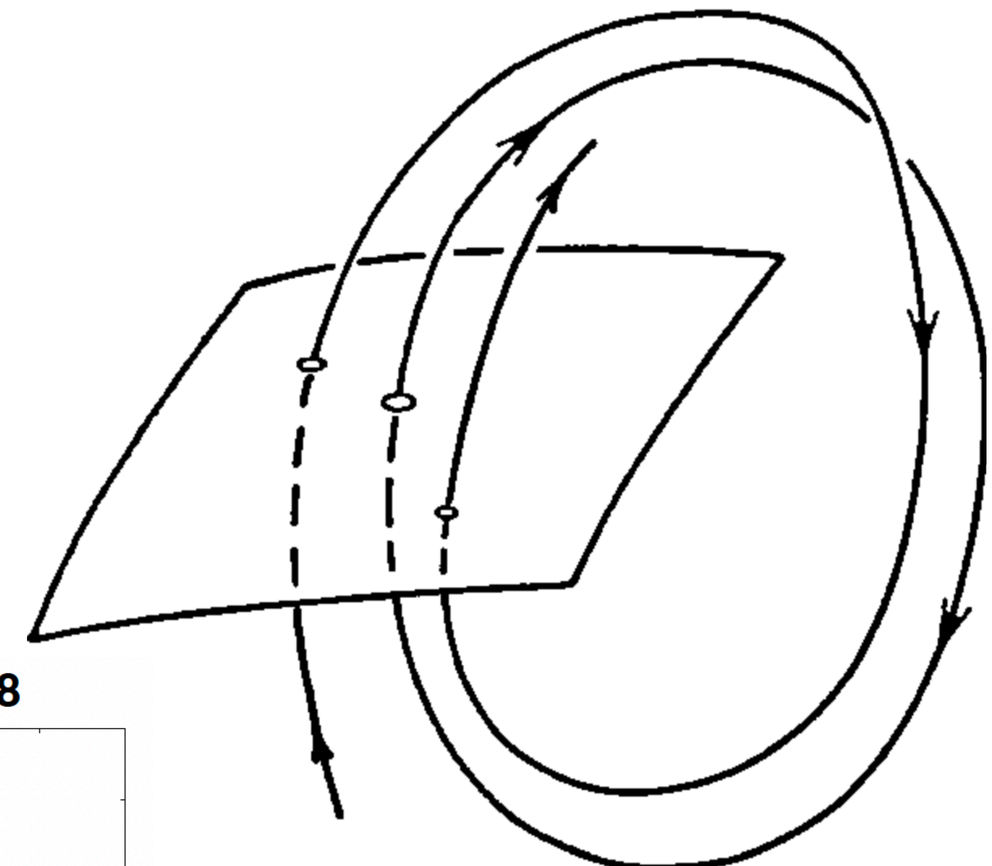


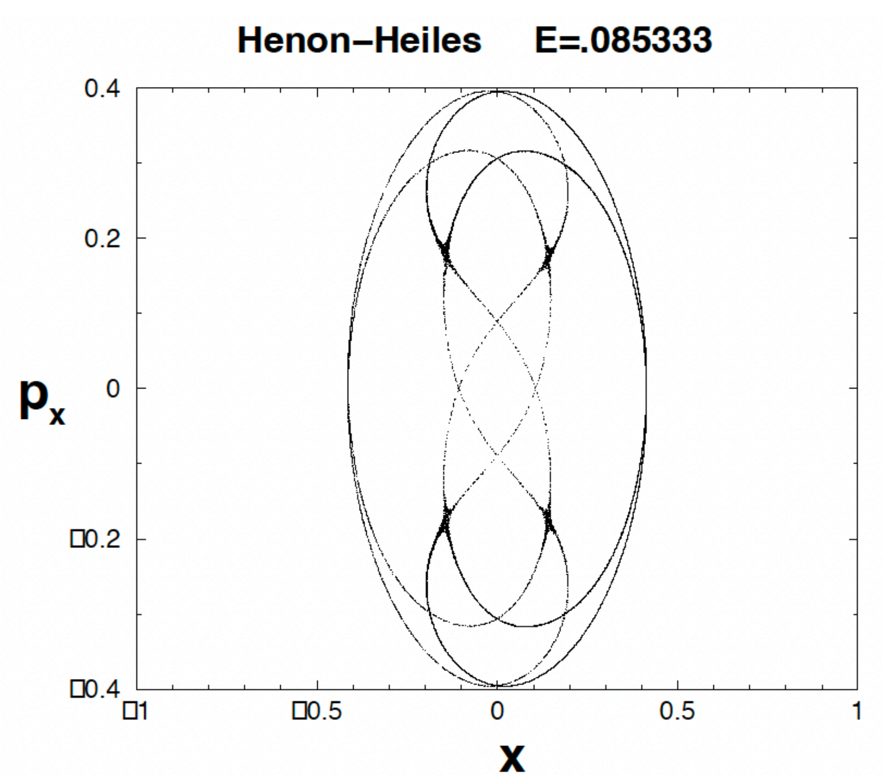
Route vers le chaos : le modèle de Hénon-Heiles

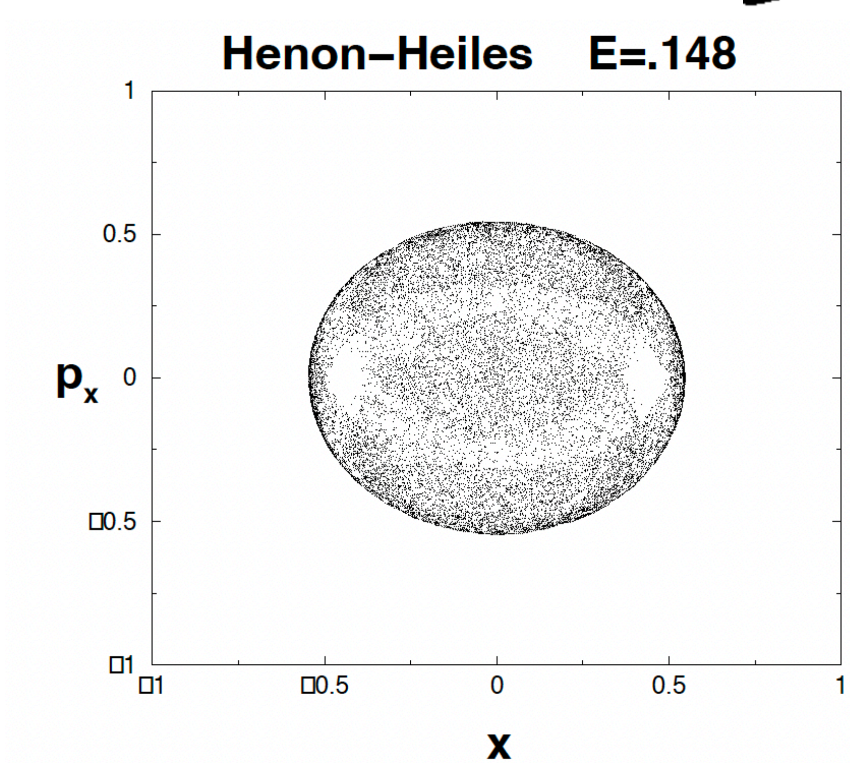
$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \lambda\left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)$$

$$\dot{x} = p_x\,,$$
$$\dot{p_x} = -x - 2\lambda x y,$$
$$\dot{y} = p_y\,,$$
$$\dot{p_y} = -y - \lambda(x^2 - y^2)$$

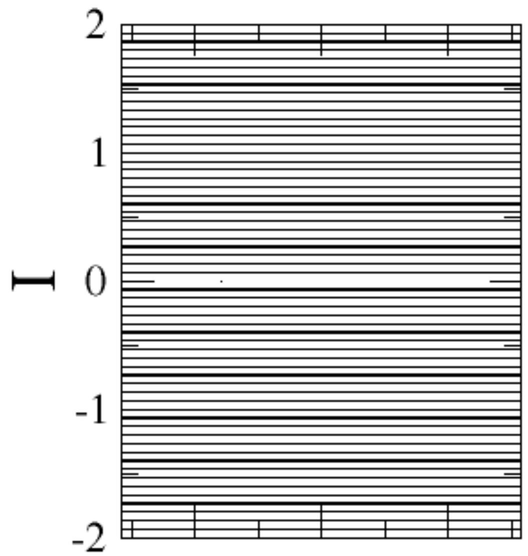
Visualisation:
Section de Poincaré



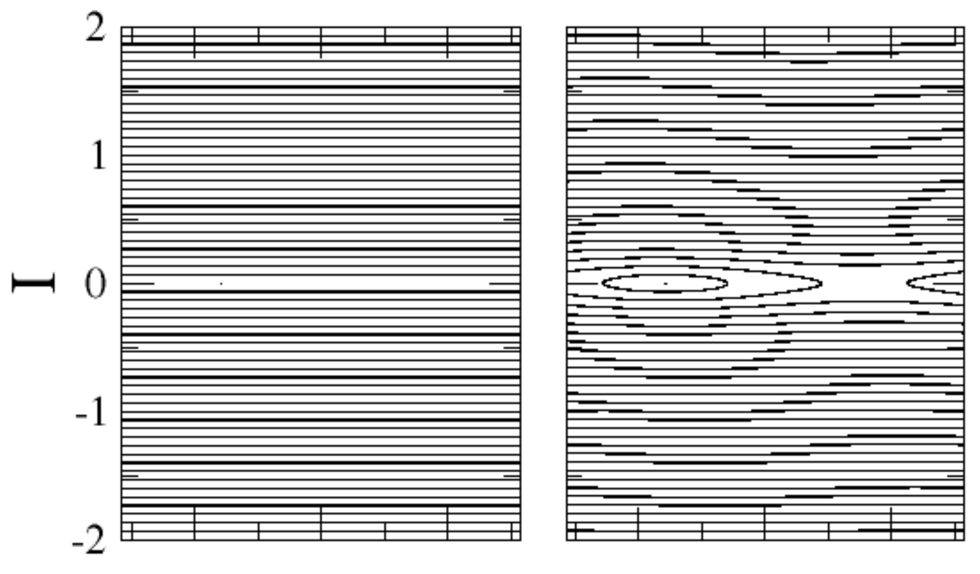




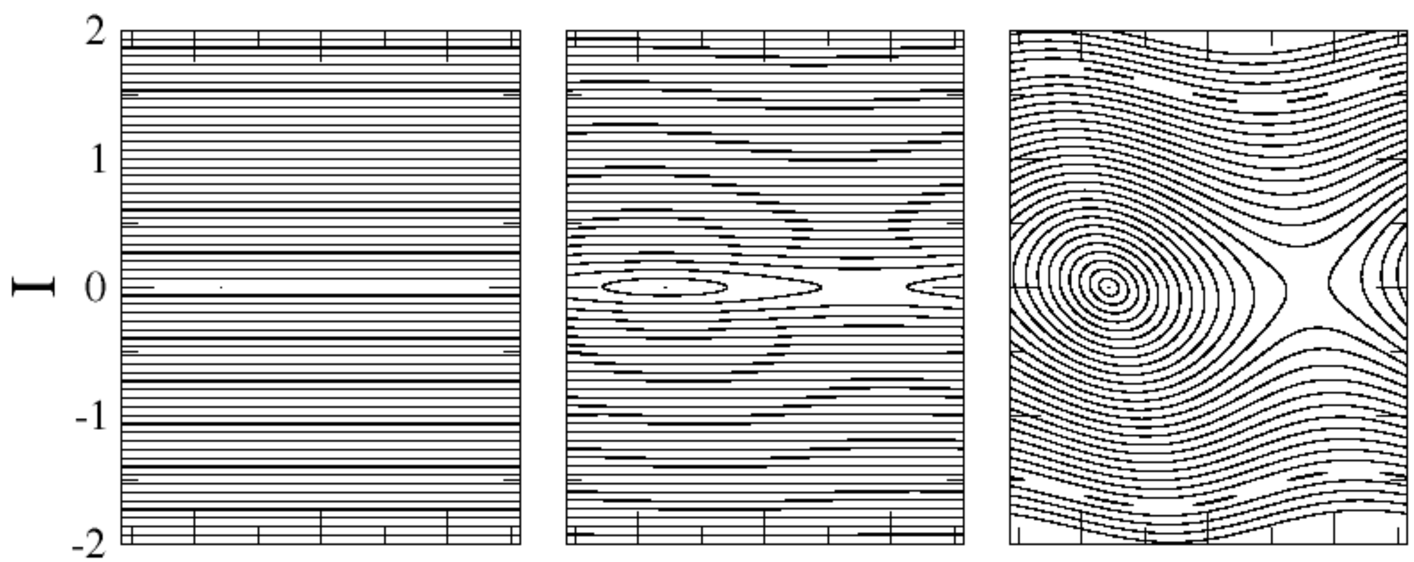
Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos
dans l'espace de phase



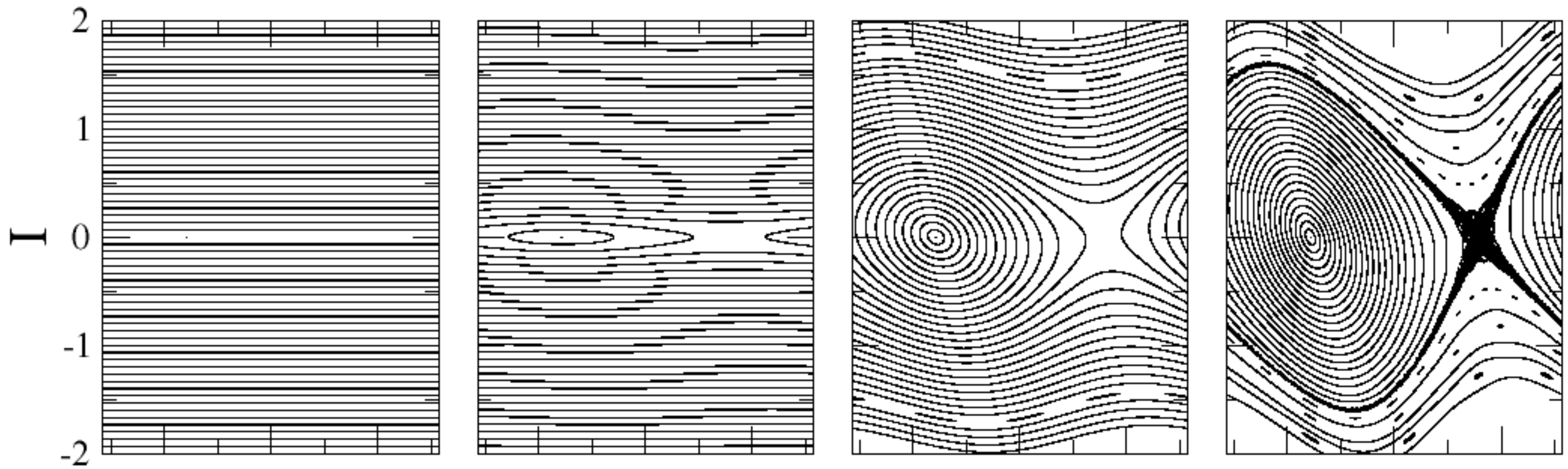
Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos dans l’espace de phase



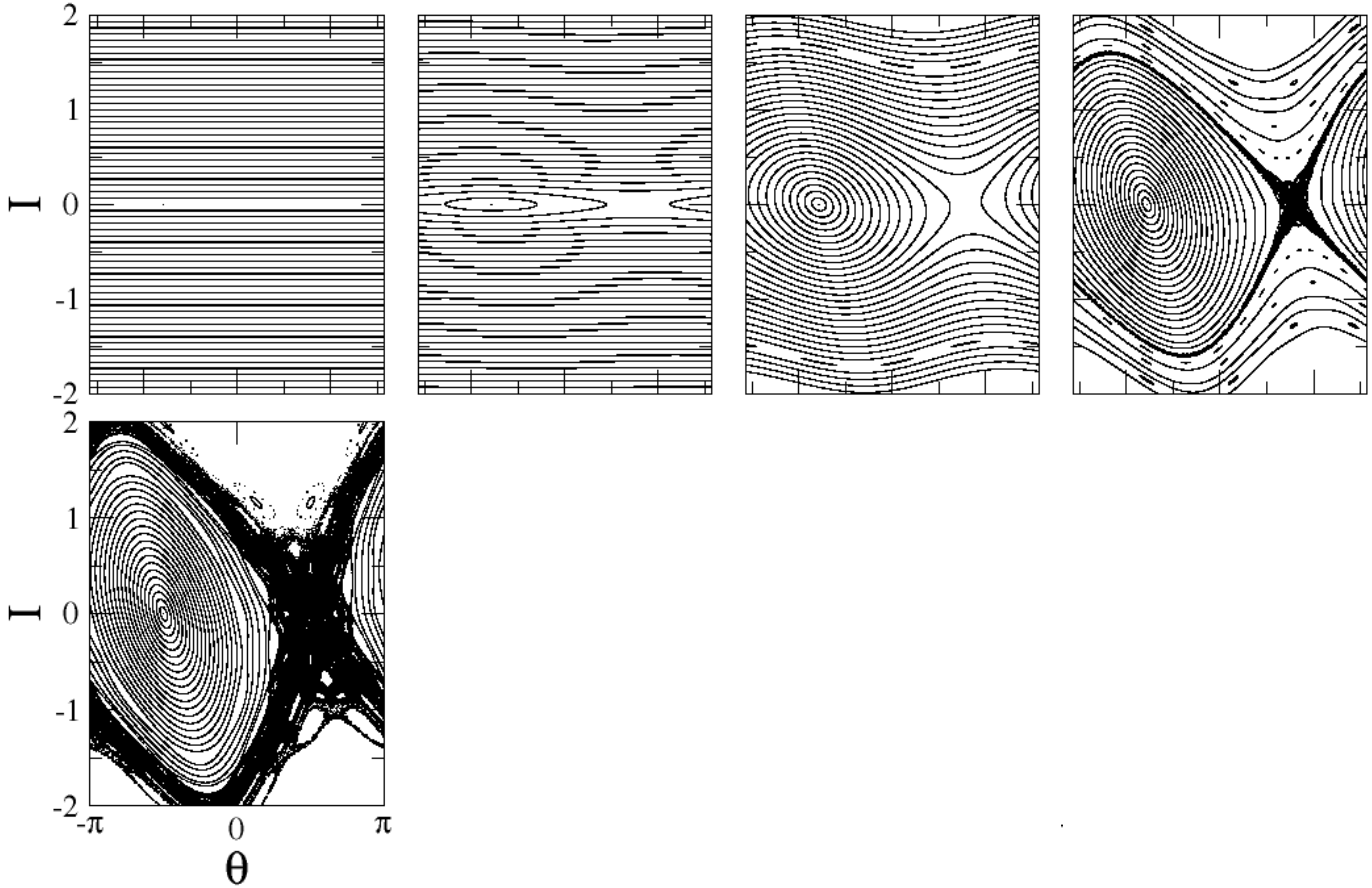
Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos dans l'espace de phase



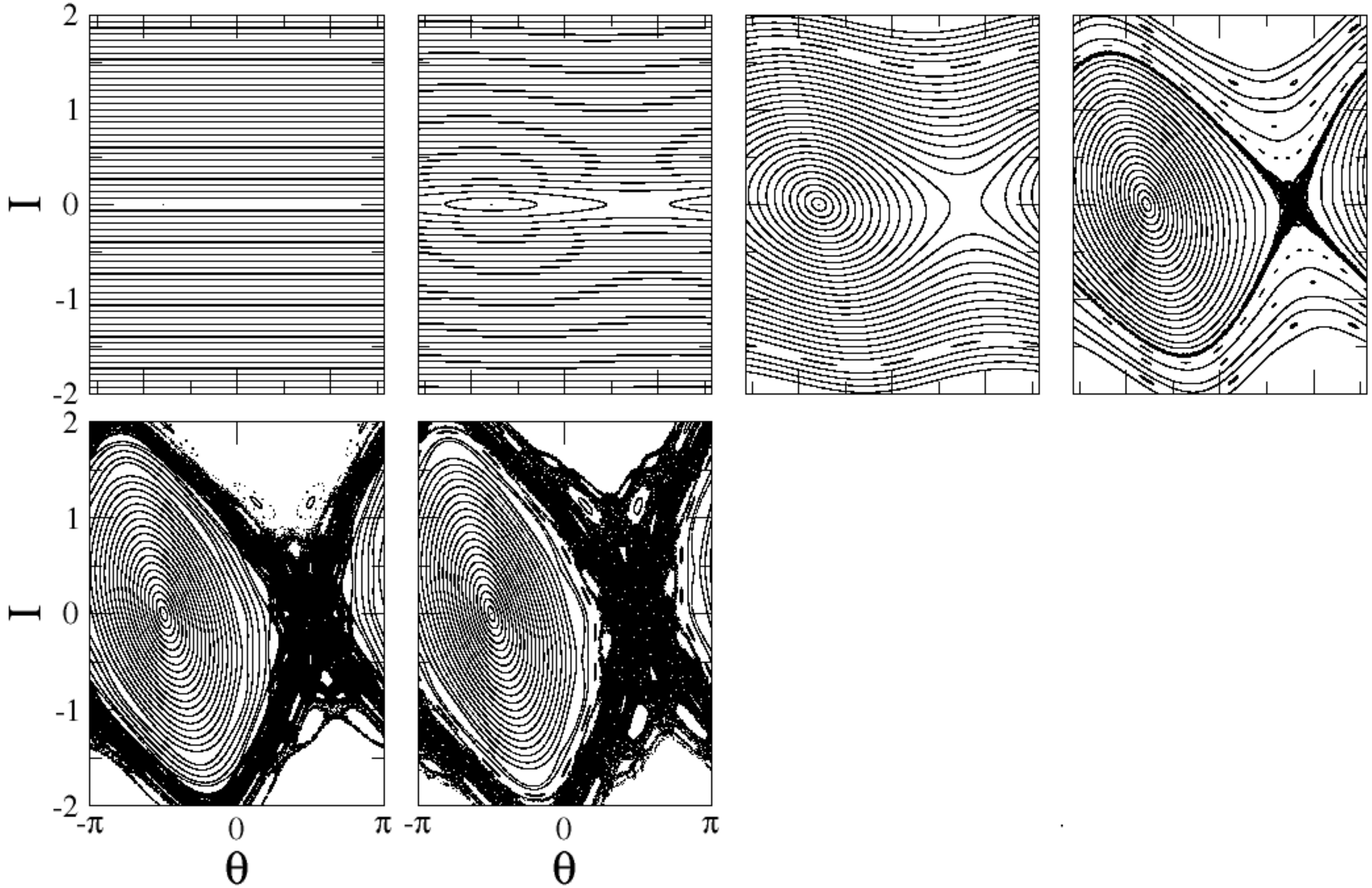
Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos dans l'espace de phase



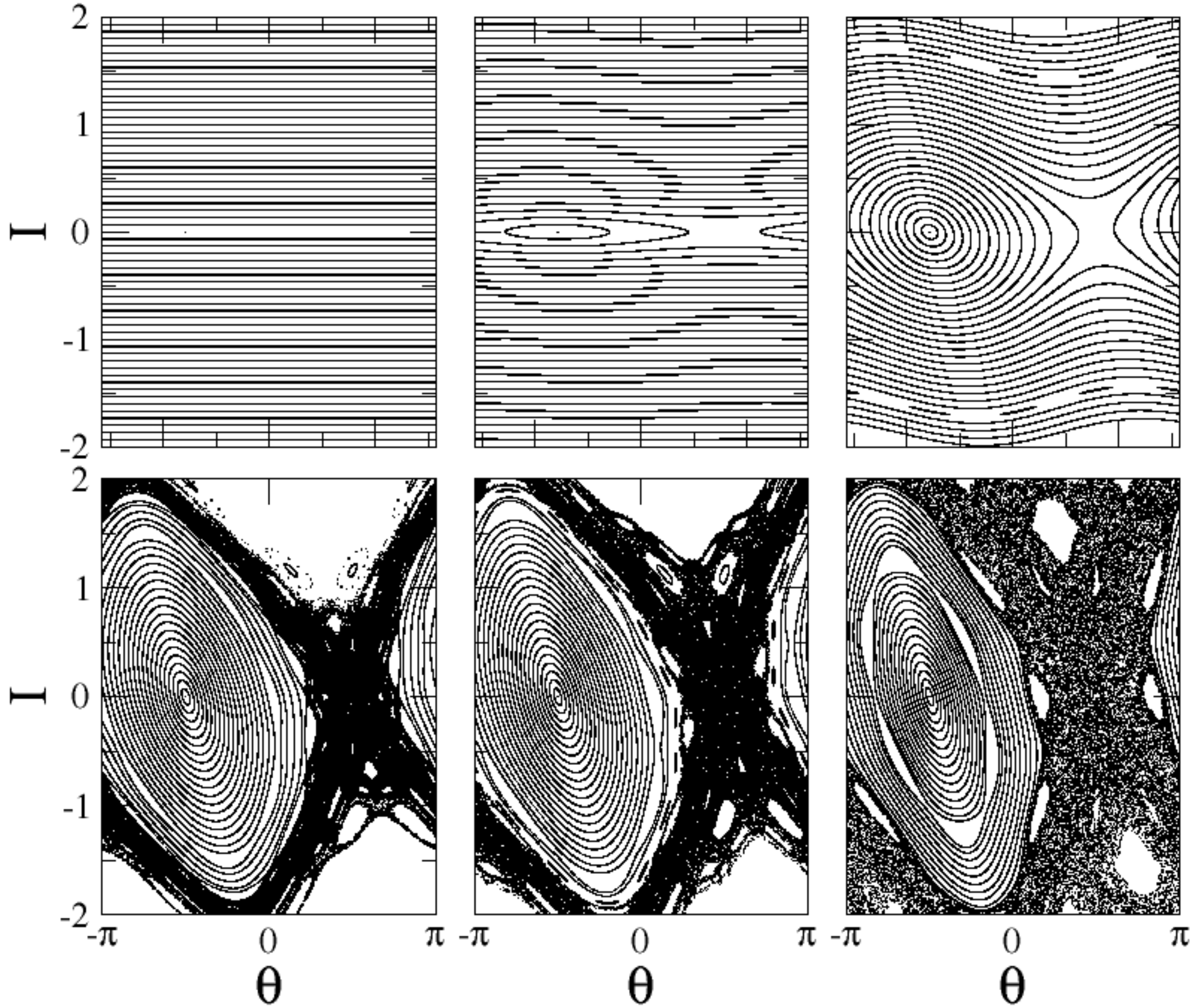
Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos dans l’espace de phase



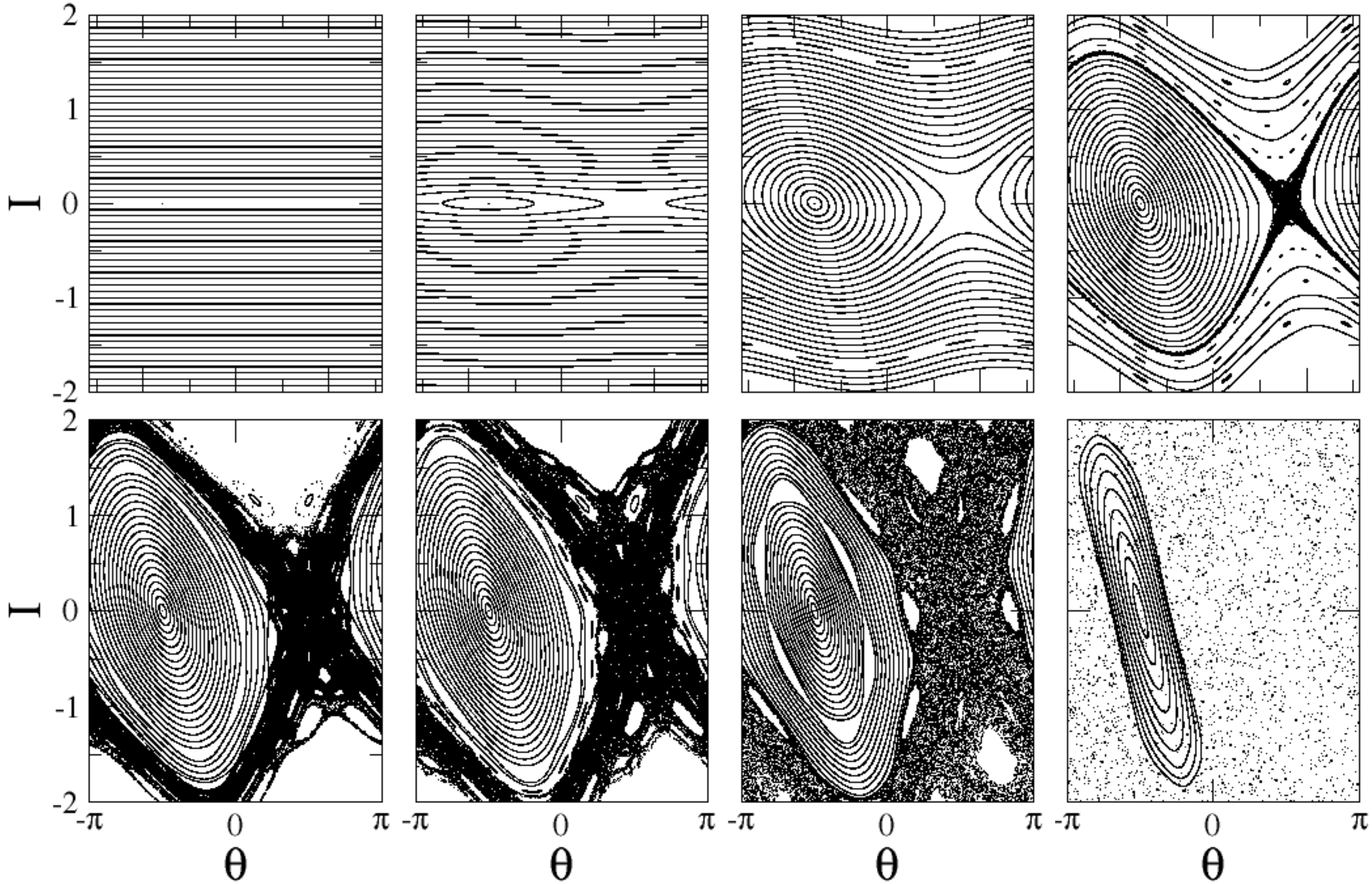
Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos dans l'espace de phase



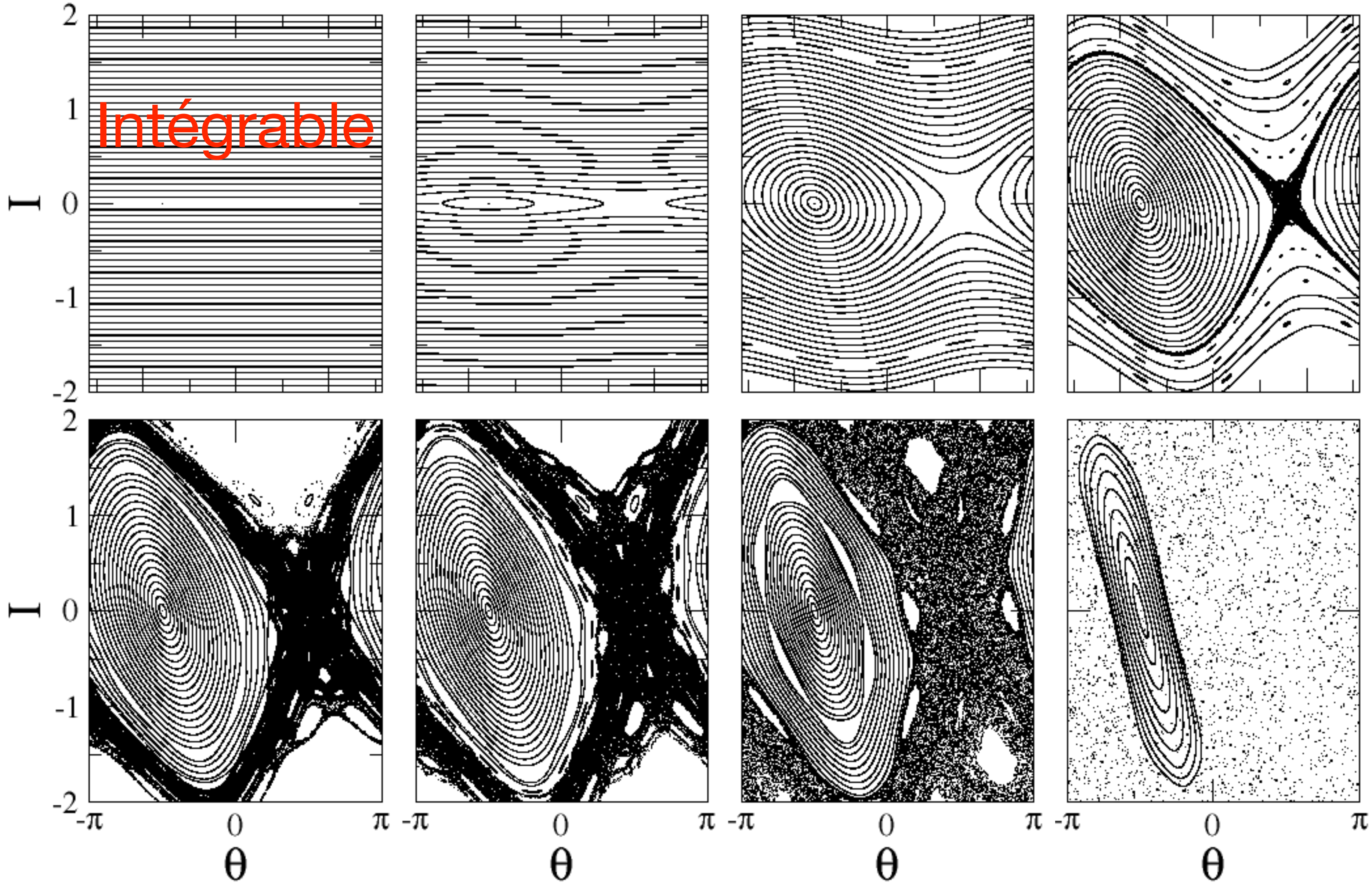
Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos dans l'espace de phase



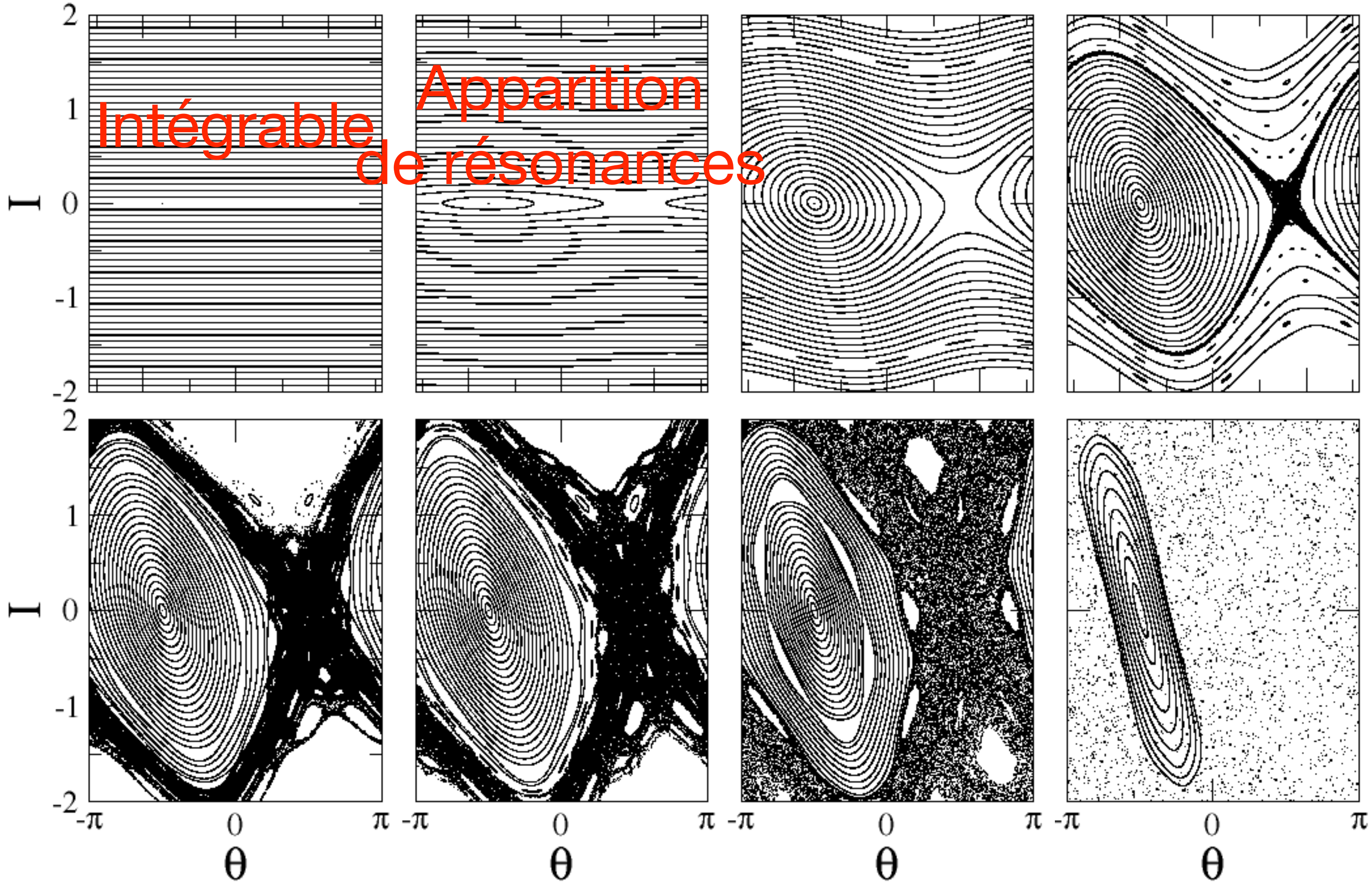
Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos dans l'espace de phase



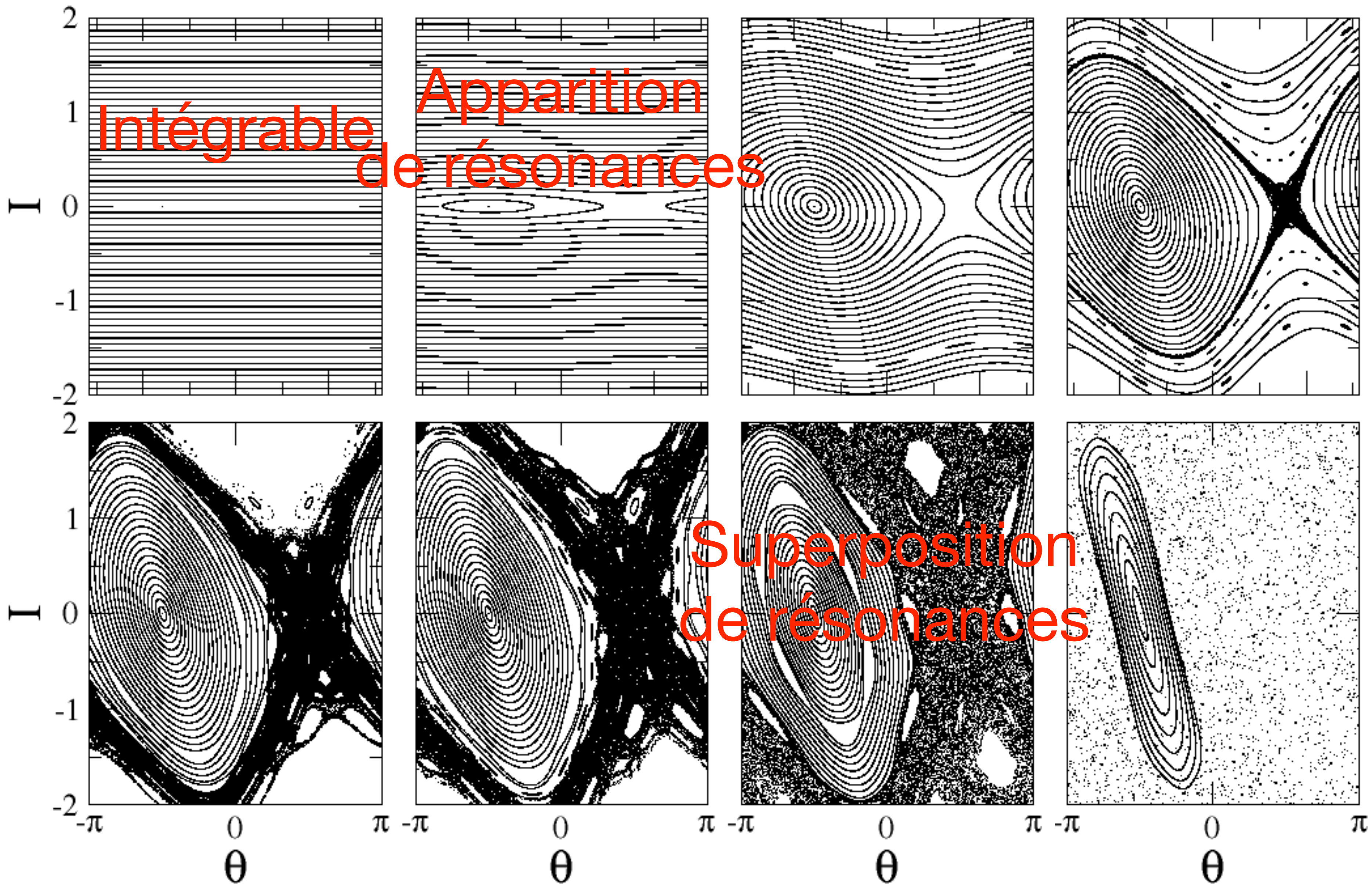
Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos dans l’espace de phase



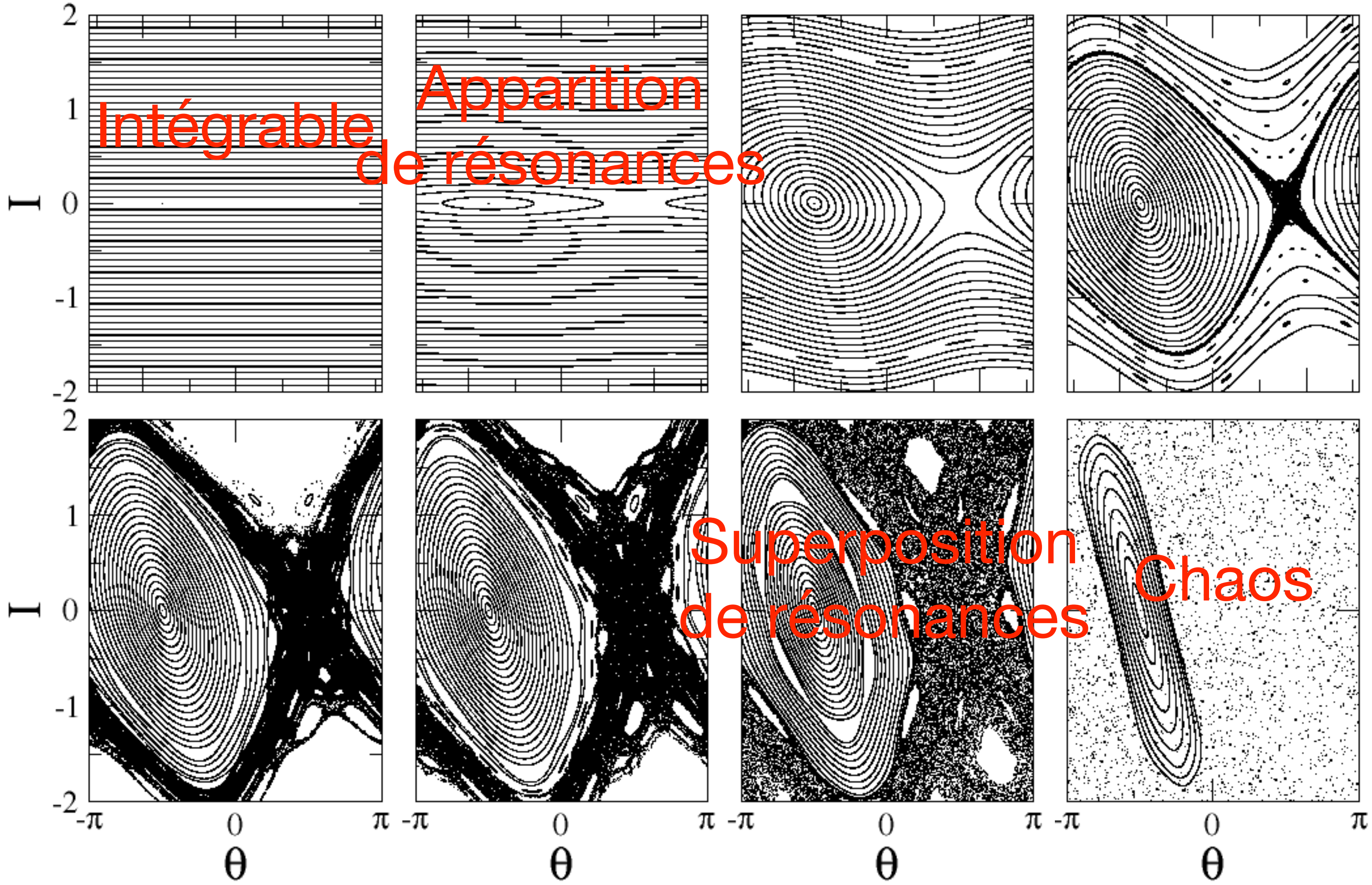
Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos dans l’espace de phase



Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos
dans l’espace de phase



Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos dans l’espace de phase



Résonances dans le système solaire